**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**CENTRO TECNOLÓGICO**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DISCIPLINA EMC 5412 - TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MECÂNICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL**

**TRABALHO 4**

**TRABALHO SOBRE FORMULAÇÃO IMPLÍCITA**

**Professor: António Fábio Carvalho da Silva**

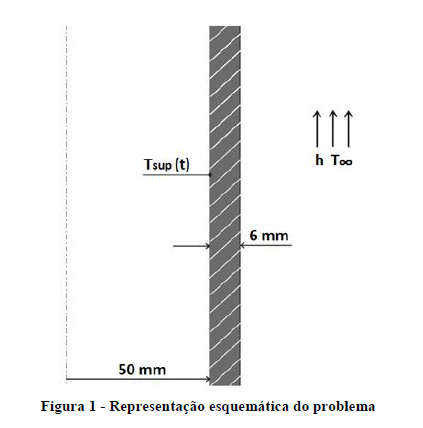
**Aluno: Gusttav Bauermann Lang**

**Matrícula: 13200534**

**Florianópolis, 28 de Abril de 2017**

1. Problema Proposto

Considere um longo cilindro de alumínio ( =2700kg/m³, = 900J/kg.°C , k = 230W/m.°C ) com raio interno igual a 50mm e espessura de parede igual a 6mm. A superfície interna de um cilindro está perfeitamente isolada enquanto a superfície externa escoa água a 80 °C. Nesta situação inicial admita que a temperatura do cilindro seja uniforme e igual a 80 °C.



No instante t = 0 a superfície interna do cilindro passa a variar de acordo com:



com em °C e t em s.

Admitindo que o coeficiente de transferência de calor por convecção h entre a superfície externa do cilindro e a água seja igual a , obtenha a distribuição de temperatura no cilindro até que, obedecido algum critério, seja alcançado o regime transiente periódico. Adote a formulação totalmente implícita e resolva os sistemas de equações lineares pelo TDMA.

1. Desenvolvimento

A distribuição de temperatura em uma parede pode ser determinada através da resolução da equação do calor. Para uma situação em regime transiente, a equação do calor em um cilindro pode ser descrita pela seguinte equação:

Para a resolução deste problema são adotadas as seguinte hipóteses:

* Condução unidimensional na direção radial;
* Propriedades térmicas do material da parede são constantes;
* Não há geração interna de calor;

Aplicando estas hipóteses, a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

Conforme visto em sala de aula, a equação discretizada pode ser resumida em:

onde o superíndice 0 é referente a variável no instante de tempo anterior. Os coeficientes da equação são:

A extremidade esquerda da parede está sob condição de temperatura prescrita, assim para este volume de controle de fronteira é utilizada a seguinte equação:

onde,

Já a extremidade direita da parede está exposta à convecção do ambiente externo, assim, para este volume de controle de fronteira, a equação do calor discretizada no espaço e no tempo pode ser escrita da seguinte maneira:

onde,

Pode-se montar um sistema linear de N equações a partir das equações descritas acima. Para resolver este problema pela formulação totalmente implícita será utilizado o método TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm).

Este processo de marcha no tempo deverá ser executado até que o regime transiente periódico seja atingido, para isto será utilizado o seguinte critério de convergência:

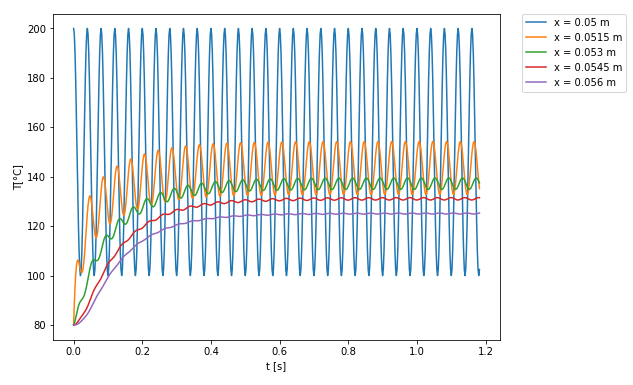
Onde é a diferença de temperatura com um período de diferença para o último volume de controle e um valor definido pelo programador.

1. Resultados

Primeiramente, foi desenvolvida uma análise discretizando o cilindro com uma malha igualmente espaçada em 5 volumes de controle. Para avaliar o comportamento do perfil de temperatura em cada volume de controle ao longo do tempo é importante adotar um passo de tempo que seja menor que o período de oscilação da temperatura prescrita na superfície interna do cilindro. Este período é de 0,04 s, assim foi adotado um passo de tempo 20 vezes menor que o período de oscilação, logo

Deste modo, foi elaborado um algoritmo na linguagem de programação Python, sendo que a rotina central para determinação do perfil de temperaturas se encontra no apêndice, onde também foi colocado a sub-rotina desenvolvida para resolução do sistema de equações pelo método do TDMA.

Nesta análise, para determinar quando o algoritmo chegaria no regime transiente periódico, foi adotado um critério de convergência global de . Desta forma, o regime transiente periódico foi alcançado dentro de aproximadamente 1,18 s. O comportamento do perfil de temperatura de todos volumes de controle, pode ser observado na Figura 2.



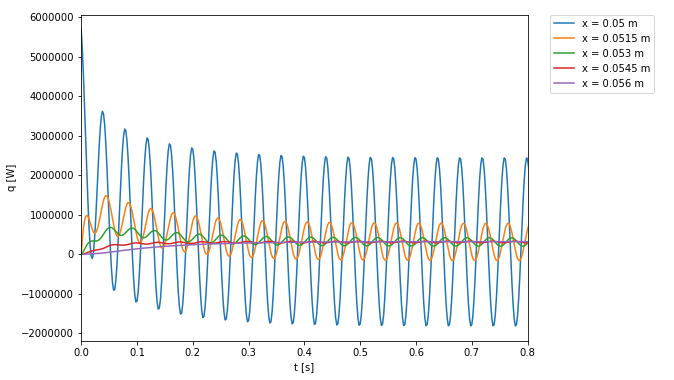
**Figura 2** – Perfil de temperaturas para os cinco volumes de controle, do tempo inicial até a convergência, com

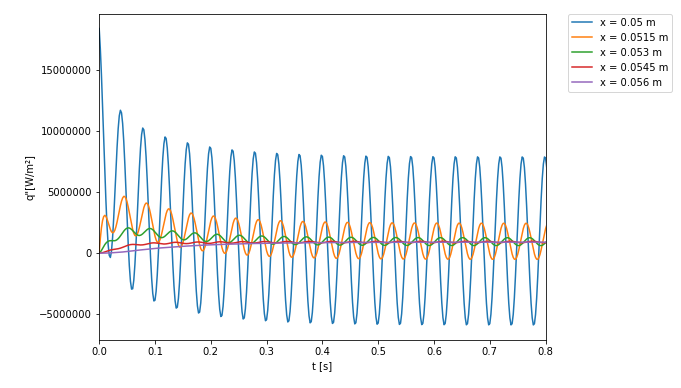
Percebe-se na Figura 2 que quanto mais próximo o volume de controle estiver da superfície de temperatura prescrita, maior será a amplitude de variação da temperatura ao longo do tempo, como para os volumes de controle 2 e 3, enquanto para os volumes de controle mais distantes, 4 e 5, esta amplitude diminui significativamente.

O calor transferido ao longo de uma superfície cilíndrica pode ser determinado através da lei de Fourier:

Enquanto o fluxo de calor é dado pela seguinte expressão:

Assim, para este caso, pode-se analisar o comportamento destas duas grandezas ao longo do tempo para os cinco volumes de controle. Os resultados para os primeiros 0,8 segundos podem ser observados na Figura 3.

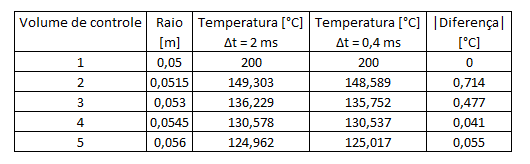




**Figura 3** – Taxa e fluxo de calor transferido para os 5 volumes de controle de a

Tal como a temperatura em cada volume de controle, ambas estas grandezas irão variar ao longo do tempo. Ao mesmo passo que a amplitude da temperatura diminui ao longo da espessura do raio, a amplitude da taxa de transferência de calor e do fluxo de calor diminuem conforme se aproximam do raio externo, ou seja, dos volumes de controle 1 para o 5. Nota-se principalmente que entre o primeiro e o segundo volume de controle o fluxo de calor e a taxa de transferência de alternam seu valor periodicamente. O que indica que hora o fluxo de calor esta indo da superfície interna para a superfície externa e hora parte do fluxo ao longo da espessura do cilindro esta indo para a superfície externa e outra parte para a superfície interna do cilindro, devido a temperatura prescrita na superfície interna do cilindro variar periodicamente.

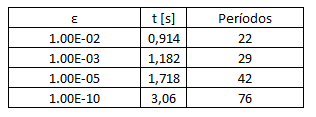
Ainda para este caso, pode-se verificar a influência do passo de tempo nos resultados obtidos, adotando um passo de tempo 100 vezes menor do que o período da temperatura prescrita da superfície interna do cilindro, assim , e utilizando o mesmo critério de convergência global de .



**Tabela 1** – Comparação da temperatura no instante para diferentes passos de tempo

Comparando os dois passos de tempo, pode-se observar que a diferença de temperatura obtida é relativamente baixa. Esta diferença pode ser causada devido a discretização do cilindro ser realizada com uma quantidade muito baixa de volumes de controle.

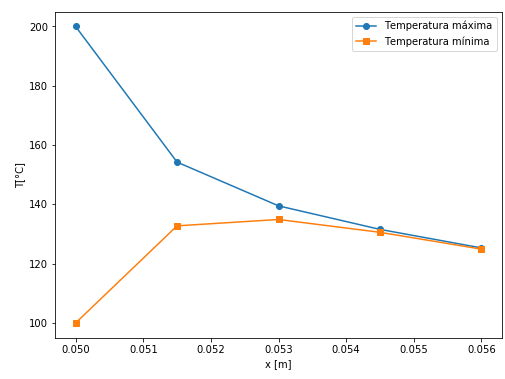
Para o primeiro caso apresentado, com passo de tempo de , foi feita uma análise verificando o tempo necessário para que a condição de regime transiente periódico seja atingida. Nesta análise será avaliado o critérios de convergência. Os resultados podem ser observados na tabela 2.



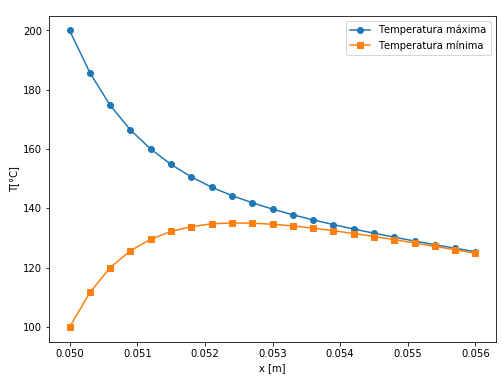
**Tabela 2** – Avaliação do critério de convergência

Com esta análise, pode-se observar que quanto mais rigoroso é o critério de convergência global maior será o tempo necessário para que o regime transiente periódico seja atingido, o que eleva a quantidade de marchas no tempo necessárias para sua determinação.

Por último, será avaliada a amplitude da temperatura ao longo do raio do cilindro, ou seja, o perfil das temperaturas máximas e mínimas para duas malhas diferentes quando o regime permante periódico for atingido.



**Figura 4** – Perfil de temperatura máxima e mínima ao longo do raio do cilindro pra 5 volumes de controle quando atingido o regime permanente periódico.



**Figura 5** – Perfil de temperatura máxima e mínima ao longo do raio do cilindro pra 21 volumes de controle quando atingido o regime permanente periódico.

O refino na malha permite observar melhor a diminuição da amplitude de variação da temperatura ao longo do raio do cilindro quando é atingido o regime transiente periódico.

1. Conclusão

Foi utilizado o método dos volumes finitos para avaliação do comportamento da temperatura ao longo do raio de um cilindro de alumínio no decorrer do tempo. Foi utilizado a formulação totalmente implícita. O uso deste método faz com que todos os coeficientes sejam positivos, garantindo estabilidade do método, porém é preciso resolver um sistema de equações lineares. Como este sistema linear forma uma matriz tridiagonal, pode-se utilizar o TDMA, que é um método simples, prático e computacionalmente rápido para auxiliar na resolução do problema dentro de um baixo tempo computacional. Para caracterizar o regime transiente periódico, é preciso adotar um critério de convergência global, de modo que a temperatura no cilindro varie com certa amplitude em torno da temperatura média, sendo que ambos variam ao longo do raio do mesmo.

Apesar deste problema não apresentar uma solução analítica exata conhecida, pode-se observar que com o aumento do refinamento da malha espacial do cilindro, pode-se obter uma melhor representação para o perfil das temperaturas máximas e mínimas ao longo do cilindro quando o regime transiente periódico é atingido. Com a análise dos perfis de temperatura, fluxo de calor e da taxa de transferência de calor, pode-se observar que estas grandezas oscilam com certa amplitude no tempo, e sua amplitude de oscilação é maior quanto mais próximo estiver da superfície interna do cilindro.

Quanto ao critério de convergência global, quanto mais restrito for, maior será o número de marchas no tempo e maior será o tempo necessário para que o regime transiente periódico seja atingido.